نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۷۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی ۳ (امتحان دی ماه پایه دوازدهم) چینش: ۱

رشته تجربی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۹/۱۰/۲۱

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

فرزانگان ۴

۱ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+۲| + |x-۱|$، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty, -۲)$ ۲) $(-\infty, ۱)$ ۳) $(-۲, ۱)$ ۴) $(۱, +\infty)$

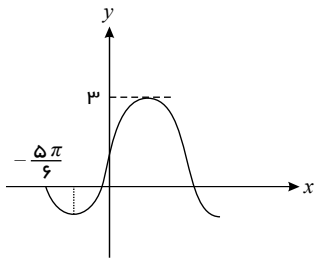
۲ اگر $f = \{(۱,۵), (۲,۰), (۳,۴), (۴,۶)\}$ و $g = \{(-۱,۴), (۲,۱), (۰,۳)\}$ باشند، حاصل‌ضرب اعضای برد تابع $\frac{۲f}{g^{-۱}}$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۶۰ ۳) صفر ۴) ۳۶

۳ دامنهٔ تابع $g(x) = f(۲x-۱)$، بازهٔ $[-۱, ۳]$ است. دامنهٔ تابع $h(x) = f(۳x+۲)$ کدام است؟

۱) $[۰, ۲]$ ۲) $[۰, ۸]$ ۳) $\left[-\frac{۵}{۳}, ۲\right]$ ۴) $\left[-\frac{۵}{۳}, ۱\right]$

۴ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{۶}$ کدام است؟



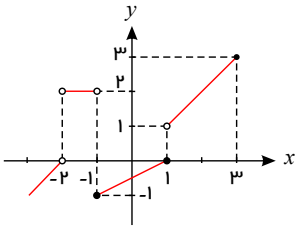
۱) ۱٫۵

۲) ۲

۳) ۲٫۵

۴) $۱ + \sqrt{۳}$

۵ نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(-\frac{x}{۳}) + \lim\limits_{x\to(-۱)^-} [f(۲x)]$ کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) -۲ ۴) -۱

۶ نقطهٔ $A(-۱, ۳)$ روی نمودار تابع $f(x)$ و نقطهٔ متناظر با آن یعنی $A'(a, b)$ روی نمودار تابع $y = ۳f(۲x-۵) - ۷$ قرار دارد. $a - b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

۷ اگر $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt[۳]{x} - ۱}{۴x^۲ + ax + b} = -\infty$ باشد، آنگاه حاصل ab کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

۸ حد عبارت $\frac{x^۲ + ۱۰x + ۱۶}{۱۲ + ۶\sqrt[۳]{x}}$، وقتی $x \to -۸$، کدام است؟

۱) -۲۴ ۲) -۱۸ ۳) -۱۲ ۴) -۶

۹ نمودار تابع $y = x^۲ - x - ۳$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی سپس ۹ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟

۱) $(-۵, ۲)$ ۲) $(-۵, ۳)$ ۳) $(-۲, ۳)$ ۴) $(-۲, ۵)$

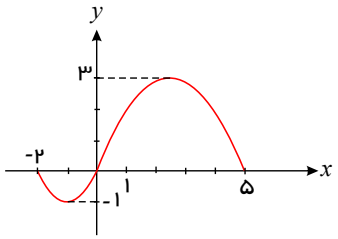
۱۰) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin x\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۱$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۳π ۳) ۴π ۴) ۵π

۱۱) اگر به‌ازای هر عدد حقیقی داشته باشیم: $(fog)^{-۱}(۲x-۴)=\frac{x}{۲}$ و $g(x)=۲x^۳+۱$. آن‌گاه نمودار وارون تابع $f(x)$، محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲) اگر نمودار تابع $y=f(x+۲)$ به صورت زیر باشد، دامنهٔ عبارت $\sqrt{xf(۱-\frac{x}{۲})}$ به کدام صورت است؟



۱) $\{-۱۲,۲\}\cup[-۲,۰]$
۲) $[-۱۲,-۲]\cup[۰,۲]$
۳) $\{-۱۲\}\cup[-۲,۲]$
۴) $[-۶,-۱]\cup[۰,۱]$

۱۳) تابع $f(x)=|x(x^۲+۳x+۳)+۲|$ در بازهٔ $[a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) $-\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $-۱-\sqrt[۳]{۲}$

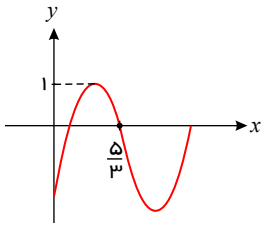
۱۴) اگر $f(x)=x^۲-۲x-۳\ ;\ x\geq ۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}(x)$ و $g(x)=\frac{x-۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۱۵) مجموع جواب‌های متمایز معادلهٔ $\cos ۲x+\cos^۲ x+۴\sin x=۳$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) ۲π ۳) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۴) π

۱۶) اگر قسمتی از نمودار $f(x)=a\sin(b\pi x)-۱$ به شکل زیر باشد، مقدار b کدام گزینه می‌تواند باشد؟

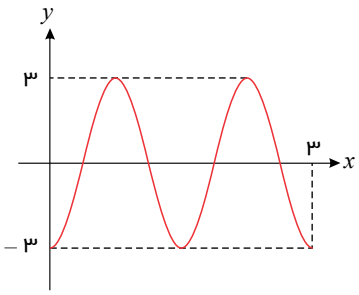


۱) ۲ ۲) -۲
۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۷) حد عبارت $\frac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\frac{۱}{\tan x}}}{\cos ۲x}$ وقتی $x\to\frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۸) شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(\pi(\frac{۳}{۲}+bx))$ را نشان می‌دهد. کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱۳}{۳}$
۲) $\frac{۱۳}{۳}$
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) $-\frac{۵}{۳}$

۱۹) اگر $f(x) = ۲x^۳ + ax^۲ + ۴x - ۳$ بر $x + ۱$ بخش‌پذیر باشد، مجموع مجذورات صفرهای $f(x)$ کدام است؟

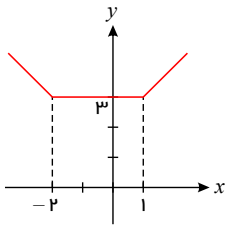
۱) $\frac{۶۱}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳}$ ۴) $\frac{۶۵}{۴}$

۲۰) مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{۸\sin^۲ x}{۱ + \tan^۲ x} + ۳\cos ۲x = ۰$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۶π ۳) ۲π ۴) ۴π

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۴ ۳ ۲ **۱** تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x=-۲$ و $x=۱$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



$\rightarrow x<-۲$: اکیداً نزولی

۲ ۴ ۳ **۲** ۱

$۲f=\{(۱,۱۰),(۲,۰),(۳,۸),(۴,۱۲)\}$ ، $g^{-۱}=\{(۴,-۱),(۱,۲),(۳,۰)\}$

$D_{۲f}\cap D_{g^{-۱}}=\{۱,۳,۴\}$

$\frac{۲f}{g^{-۱}}=\{(۱,\frac{۱۰}{۲}),(۳,\frac{۸}{۰}),(۴,\frac{۱۲}{-۱})\}\rightarrow\frac{۲f}{g^{-۱}}=\{(۱,۵),(۴,-۱۲)\}$

$\frac{۲f}{g^{-۱}}$ برد حاصل‌ضرب اعضای $=۵\times(-۱۲)=-۶۰$

۳ **۴** ۳ ۲ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع $y=f(x)$ را می‌یابیم:

$-۱\le x\le ۳\rightarrow -۲\le ۲x\le ۶\rightarrow -۳\le ۲x-۱\le ۵$

حال به کمک دامنهٔ تابع $y=f(x)$ به دامنهٔ $h(x)=f(۳x+۲)$ می‌رسیم.

$-۳\le ۳x+۲\le ۵\rightarrow -۵\le ۳x\le ۳\rightarrow -\frac{۵}{۳}\le x\le ۱$

۴ ۴ ۳ **۲** ۱

$y=a+b\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=a+b\sin x$

$\left|\begin{array}{l}\frac{-۵\pi}{۶}\\ ۰\end{array}\right.\xrightarrow{\text{صدق}}۰=a+b\sin(\frac{-۵\pi}{۶})\rightarrow ۰=a-b\sin(\frac{۵\pi}{۶})$

$\rightarrow ۰=a-b\sin(\pi-\frac{\pi}{۶})\rightarrow ۰=a-b\sin(\frac{\pi}{۶})\rightarrow a-\frac{b}{۲}=۰\quad(I)$

در تابع $y=a\sin bx+c$ مقدار Max تابع از رابطهٔ $|a|+c$ به‌دست می‌آید و چون تابع داده‌شده فرمت سینوس را دارد $ab>۰$ است و چون $y(۰)>۰$ است پس $a>۰$ است و درنتیجه $b>۰$ است.

$Max=|a|+c\rightarrow ۳=|b|+a\rightarrow ۳=b+a\quad(II)$

از روابط (I) و (II) مقادیر $a=۱$ و $b=۲$ حاصل می‌شوند.

پس : $f(x)=۱+۲\sin x\rightarrow f(\frac{\pi}{۶})=۱+۲(\frac{۱}{۲})=۲$

۵ ۴ **۳** ۲ ۱

$x\rightarrow ۳^-:x<۳\rightarrow\frac{x}{۳}<۱\rightarrow -\frac{x}{۳}>-۱$

پس: $\lim\limits_{x\rightarrow ۳^-}f(-\frac{x}{۳})=\lim\limits_{x\rightarrow(-۱)^+}f(x)=-۱$

از طرفی: $\lim\limits_{x\rightarrow(-۱)^-}[f(۲x)]=[f((-۲)^-)]=[۰^-]=-۱$

توجه کنید وقتی x از سمت مقادیر کوچک‌تر از -۲ به -۲ نزدیک می‌شود y از سمت مقادیر کوچک‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود.

بنابراین: $\lim\limits_{x\rightarrow ۳^-}f(-\frac{x}{۳})+\lim\limits_{x\rightarrow(-۱)^-}[f(۲x)]=-۱+(-۱)=-۲$

۶ ۴ ۳ **۲** ۱

روش اول:

$$A(-1,3)\in f \Rightarrow f(-1)=3 \quad , \quad 2x-5=-1 \Rightarrow x=2$$

$$y(2)=3f(-1)-7=3\times 3-7=2 \Rightarrow A'(2,2) \Rightarrow a=2\ ,\ b=2 \Rightarrow a-b=0$$

پس: $y(2)=3f(-1)-7=3(3)-7=2 \rightarrow A'\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right. \xrightarrow{a=2\ ,\ b=2} a-b=0$

روش دوم: تابع f پنج واحد به سمت راست برده شده و سپس طول‌هایش نصف شده و عرض‌هایش ۳ برابر شده و نهایتاً ۷ واحد به پایین برده شده است.

$$\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{پنج واحد راست}} \left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{طول‌ها نصف}} \left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{عرض ۳ برابر}} \left|\begin{matrix}2\\9\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{هفت واحد پایین}} A'\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right.$$

پس $a-b=0$ است.

۷ ۴ **۳** ۲ ۱ صورت کسر به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ منفی است و چون جواب حد برابر $-\infty$ شده است بنابراین مخرج باید 0^+ باشد پس حتماً $x=\frac{1}{2}$ ریشهٔ مضاعف مخرج است یعنی مخرج به‌صورت $4(x-\frac{1}{2})^2$ است.

$$4(x-\frac{1}{2})^2=4(x^2-x+\frac{1}{4})=4x^2-4x+1 \xrightarrow{\text{مقایسه با مخرج}} \begin{cases}a=-4\\b=1\end{cases} \rightarrow ab=-4$$

۸ ۴ **۳** ۲ ۱ روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق‌ولاغر کمک می‌گیریم $\left((a+b)(a^2+b^2-ab)=a^3+b^3\right)$

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{6(2+\sqrt[3]{x})}\times\frac{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}{4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{(x+8)(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6(8+x)}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{(x+2)(4+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x})}{6}=\frac{-6(12)}{6}=-12$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -8}\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -8}\frac{2x+10}{6(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})}=\frac{-6}{6(\frac{1}{12})}=-12$$

۹ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$y=x^2-x-3 \xrightarrow[x\to x+2]{\text{۲ واحد به چپ}} y=(x+2)^2-(x+2)-3 \xrightarrow{\text{۹ واحد پایین}} y=(x+2)^2-(x+2)-3-9$$

نمودار زیر محور xها قرار دارد یعنی باید نامعادلهٔ $y<0$ را حل کنیم.

$$y<0 \Rightarrow (x+2)^2-(x+2)-12<0 \Rightarrow x^2+4x+4-x-2-12<0$$

$$\Rightarrow x^2+3x-10<0 \Rightarrow (x-2)(x+5)<0 \Rightarrow -5<x<2 \Rightarrow x\in(-5,2)$$

۱۰ **۴** ۳ ۲ ۱ می‌دانیم $\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$ است.

$$4\sin x\cdot\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1 \rightarrow -4\sin x\cos x=1 \rightarrow -4(\frac{1}{2}\sin 2x)=1 \rightarrow -2\sin 2x=1 \rightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2}=\sin(\frac{-\pi}{6})$$

$$\xrightarrow{\sin x=\sin\alpha \rightarrow \begin{cases}x=2k\pi+\alpha\\x=2k\pi+\pi-\alpha\end{cases}} \begin{cases}2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{12}\\2x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}\rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}\end{cases} \xrightarrow{\text{به } k \text{ عدد می‌دهیم}} x=\frac{7\pi}{12},\frac{11\pi}{12},\frac{19\pi}{12},\frac{23\pi}{12} \xrightarrow{\text{مجموع جواب‌ها}} \frac{60\pi}{12}=5\pi$$

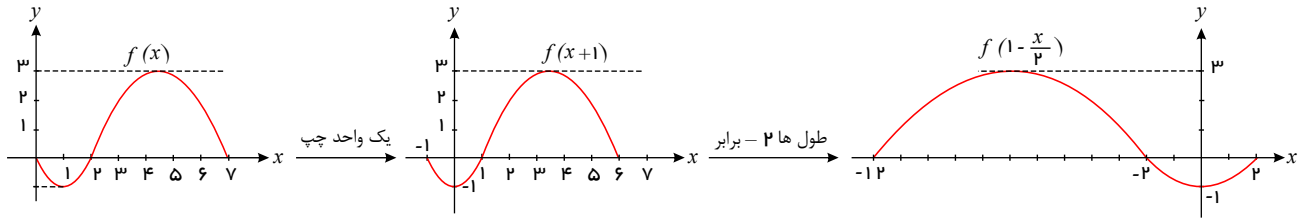
۱۱ ۴ **۳** ۲ ۱ می‌دانیم که $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ است.

$$(fog)^{-1}(2x-4)=\frac{x}{2}\rightarrow(g^{-1}of^{-1})(2x-4)=\frac{x}{2}\rightarrow g^{-1}(f^{-1}(2x-4))=\frac{x}{2} \quad \star$$

محل برخورد نمودار وارون تابع $f(x)$ با محور yها همان $f^{-1}(0)$ است، بنابراین در رابطهٔ $\star$، x را ۲ قرار می‌دهیم تا $f^{-1}(0)$ درست شود.

$$x=2\xrightarrow{\star}g^{-1}(f^{-1}(0))=1\rightarrow g(1)=f^{-1}(0)\rightarrow 2(1)^3+1=f^{-1}(0)\rightarrow f^{-1}(0)=3$$

۱۲ ۴ ۳ ۲ **۱** نمودار $f(x+2)$ را دو واحد به راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)$ حاصل شود.



برای تعیین دامنهٔ $\sqrt{xf(1-\frac{x}{2})}$ باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$xf(1-\frac{x}{2}) \geq 0$$

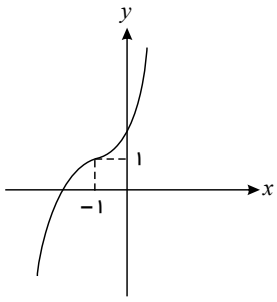
x	-12		-2		0		2
x		$-$		$-$	0	$+$	
$f(1-\frac{x}{2})$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
$xf(1-\frac{x}{2})$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

$\longrightarrow D_f = [-2, 0] \cup \{-12, 2\}$

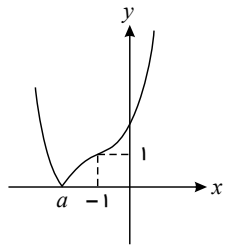
۱۳ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = |x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1| = |(x+1)^3 + 1|$$

نمودار تابع $y = (x+1)^3 + 1$ را به کمک انتقال تابع $y = x^3$ رسم می‌کنیم:



برای رسم نمودار f، کافیست قسمتی از نمودار را که زیر محور xهاست، نسبت به محور xها قرینه کنیم و آن قسمت از نمودار را که بالای محور xهاست حفظ کنیم:



برای به‌دست آوردن a باید معادلهٔ $f(x) = 0$ را حل کنیم:

$$(x+1)^3 + 1 = 0 \to (x+1)^3 = -1 \to x+1 = -1 \to x = -2$$

پس تابع f در بازهٔ $[-2, +\infty)$ صعودی اکید است و حداقل مقدار a برابر با -2 است.

۱۴ **۴** ۳ ۲ ۱ برای پیدا کردن تابع وارون، کافی است x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \to y = (x-1)^2 - 1 - 3 \to y = (x-1)^2 - 4 \to (x-1)^2 = y + 4$$

$$\to x - 1 = \pm\sqrt{(y+4)} \xrightarrow{x \geq 1} x - 1 = \sqrt{y+4} \to x = 1 + \sqrt{y+4} \to f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+4}$$

$$f^{-1}(x) = g(x) \to 1 + \sqrt{x+4} = \frac{x-9}{2} \xrightarrow{\text{مشاهدهٔ گزینه‌ها}} x = 21$$

توجه کنید حل معادلهٔ آخر بدین صورت است:

$$2\sqrt{x+4} = x - 11 \xrightarrow{\text{توان } 2} 4x + 16 = x^2 + 121 - 22x \to x^2 - 26x + 105 = 0$$

$$\to (x-21)(x-5) = 0 \to \begin{cases} x = 21 & \text{ق ق} \\ x = 5 & \text{غ ق ق (در معادله صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

۱۵ ۴ ۳ ۲ **۱** می‌دانیم $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ و $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ است.

$$\cos 2x + \cos^2 x + 4\sin x = 3 \to 1 - 2\sin^2 x + 1 - \sin^2 x + 4\sin x = 3$$

$$\to 3\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0 \xrightarrow{\sin x = A} 3A^2 - 4A + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} A = 1 \to \sin x = 1 \to x = \frac{\pi}{2} \\ A = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \to \sin x = \frac{1}{3} \to \text{در بازهٔ } [0,\pi] \text{ دو جواب مکمل دارد.} \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌ها برابر $\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ است.

۱۶) ۱ ۲ ۳ **۴** در تابع $y = a\sin bx + c$، بیشترین مقدار تابع از رابطهٔ $|a| + c$ بدست می‌آید.

$$|a| + c = 1 \to |a| - 1 = 1 \to |a| = 2 \to a = \pm 2$$

شکل داده شده فرمت خود سینوس را دارد بنابراین a و b هم‌علامتند ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که b و a هر دو مثبت هستند.

$$f(x) = 2\sin(b\pi x) - 1 \xrightarrow[\text{صدق}]{\left|\begin{matrix}\frac{5}{3}\\ 0\end{matrix}\right.} 0 = 2\sin\frac{5b\pi}{3} - 1 \to \sin\frac{5b\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

مقدار سینوس برابر $\frac{1}{2}$ شده است برای xهای مثبت این اتفاق اولین بار در $\frac{\pi}{6}$ و بار دوم در $\frac{5\pi}{6}$ اتفاق می‌افتد و با توجه به شکل تابع، باید $\frac{5b\pi}{3}$ برابر $\frac{5\pi}{6}$ باشد.

$$\frac{5b\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \to \frac{b}{3} = \frac{1}{6} \to b = \frac{1}{2}$$

به طریق مشابه برای حالتی که a و b هر دو منفی هستند، $b = -\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید.

۱۷) ۱ **۲** ۳ ۴ می‌دانیم $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} - \frac{1}{\sqrt{\tan x}}}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\tan x - 1}{\sqrt{\tan x}}}{\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x - 1)(1+\tan^2 x)}{\sqrt{\tan x}(1-\tan^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-(1-\tan x)(1+\tan^2 x)}{\sqrt{\tan x}(1+\tan x)(1-\tan x)} = \frac{-(1+1)}{1(1+1)} = -1$$

۱۸) ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا ضابطهٔ تابع داده شده را ساده می‌کنیم.

$$y = a\sin(\frac{3\pi}{2} + b\pi x) \to y = -a\cos(b\pi x)$$

در تابع $y = a\cos bx + c$ دورهٔ تناوب از رابطهٔ $T = \frac{2\pi}{|b|}$ به‌دست می‌آید و ماکسیمم آن از رابطهٔ $Max = |a| + c$ به دست می‌آید.

در فاصلهٔ $[0,3]$ شکل دوبار تکرار شده است، پس:

$$2T = 3 \to T = \frac{3}{2} \to \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{3}{2} \to \frac{2}{|b|} = \frac{3}{2} \to |b| = \frac{4}{3} \to b = \frac{4}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$Max = 3 \to |-a| + 0 = 3 \to |a| = 3 \to a = 3, a = -3$$

چون شکل داده شده فرمت قرینهٔ کسینوس را دارد باید ضریب کسینوس منفی باشد بنابراین $a = 3$ است.

$$a + b = \begin{cases} 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3} \\ 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

بنابراین کمترین مقدار $a + b$ برابر $\frac{5}{3}$ است.

۱۹) ۱ ۲ ۳ **۴**

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + 4x - 3$$

چون $f(x)$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow -2 + a - 4 - 3 = 0 \Rightarrow a = 9$$

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 4x - 3$$

با تقسیم $f(x)$ بر $x + 1$ داریم:

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳+۹x^۲+۴x-۳ & x+۱ \\ \hline -۲x^۳ \pm ۲x^۲ & ۲x^۲+۷x-۳ \\ \hline ۷x^۲+۴x-۳ & \\ -۷x^۲ \pm ۷x & \\ \hline -۳x-۳ & \\ \mp ۳x \mp ۳ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$f(x)=(x+۱)(۲x^۲+۷x-۳)=۰ \Rightarrow x=-۱\ ,\ ۲x^۲+۷x-۳=۰ \Rightarrow \Delta>۰$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+۷x-۳=۰$ را $x_۱$ و $x_۲$ بنامیم، داریم:

$$x_۱^۲+x_۲^۲=(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲=(-\frac{b}{a})^۲-۲(\frac{c}{a})=\frac{۴۹}{۴}-۲(-\frac{۳}{۲})=\frac{۶۱}{۴}$$

$$f(x)\text{ مجموع مجذورات صفرهای }=(-۱)^۲+x_۱^۲+x_۲^۲=۱+\frac{۶۱}{۴}=\frac{۶۵}{۴}$$

۲۰ ۴ ۳ ۲ ۱ می‌دانیم $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ و $\sin a\cos a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a$ است.

$$\frac{۸\sin^۲ x}{۱+\tan^۲ x}+۳\cos ۲x=۰ \to \frac{۸\sin^۲ x}{\frac{۱}{\cos^۲ x}}+۳\cos ۲x=۰ \to ۸\sin^۲ x\cos^۲ x+۳\cos ۲x=۰$$

$$\to ۸(\sin x\cos x)^۲+۳\cos ۲x=۰ \to ۸(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲+۳\cos ۲x=۰$$

$$\to ۲\sin^۲ ۲x+۳\cos ۲x=۰ \to ۲(۱-\cos^۲ ۲x)+۳\cos ۲x=۰$$

$$\to ۲\cos^۲ ۲x-۳\cos ۲x-۲=۰ \xrightarrow{\cos ۲x=A} ۲A^۲-۳A-۲=۰ \to \Delta=b^۲-۴ac=۹+۱۶=۲۵$$

$$\begin{cases} \cos ۲x=\frac{۳+۵}{۴}=۲ \quad \text{غ‌ق‌ق} \\ \cos ۲x=\frac{۳-۵}{۴}=-\frac{۱}{۲}=\cos\frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\cos x=\cos\alpha \to x=۲k\pi\pm\alpha} ۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳} \to x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{به } k \text{ عدد می‌دهیم}} \frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳} \xrightarrow{\text{مجموع}} \frac{۱۲\pi}{۳}=۴\pi$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	**۱**	۲	۳	۴
۲	۱	**۲**	۳	۴
۳	۱	۲	۳	**۴**
۴	۱	**۲**	۳	۴
۵	۱	۲	**۳**	۴

۶	۱	**۲**	۳	۴
۷	۱	۲	**۳**	۴
۸	۱	۲	**۳**	۴
۹	**۱**	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	**۴**

۱۱	۱	۲	**۳**	۴
۱۲	**۱**	۲	۳	۴
۱۳	۱	**۲**	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	**۴**
۱۵	**۱**	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	**۴**
۱۷	۱	**۲**	۳	۴
۱۸	۱	۲	**۳**	۴
۱۹	۱	۲	۳	**۴**
۲۰	۱	۲	۳	**۴**